التقدير النقطي

في كثير من المسائل الاحصائية يتطلب تقدير القانون الاحتمالي لمتغير عشوائي الذي يمثل ظاهرة معينة للمجتمع المدروس لهذا الغرض نأخذ متتالية مستقلة من المتغيرات $X_1, \ldots, X_n$ التي لها نفس التوزيع المجهول وذلك بتكرار التجربة التي تعرف المتغير الأساسي n مرة ثم نعرف (نوجد) تابع التوزيع المتجمع التجريبي $F_X^{(n)}(x)$ كما عرفناه للمتغيرين $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ كما يلي:

$F_X^{(n)}(x)$ هو عدد عناصر العينة (القيم) التي تكون أصغر من x مقسوماً على حجم العينة n واستناداً لمبرهنات وقواعد احصائية فإن $F_X^{(n)}(x)$ يسعى بانتظام عندما n تسعى الى اللانهاية الى F_X التوزيع المتجمع للمتغير X

وفي بعض الحالات نكون على دراية من نوع القانون الاحتمالي f_X للمتغير X لكننا نجهل وسطاء f_X وعندها نقوم بتقدير تلك الوسطاء بدلالة العينة $X_1, \ldots, X_n$ أو بقيمها $x_1, \ldots, x_n$ وهذا العمل يدعى بالتقدير النقطي، وهناك عدة طرق (وسائل) احصائية لايجاد التقدير، من هذه الطرق: طريقة العزوم والتي نلخصها بما يلي

1) من معرفتنا للصيغة الرياضية لـ f_X نحسب العزوم $E(X)$ ، $E(X^2)$ ، ... ، $E(X^k)$ ، حيث k عدد الوسطاء وهي عبارات تحتوي على وسطاء الكثافة $f_X(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$

2) نحسب عزوم العينة $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ... $M_k = \frac{1}{n}\sum x_i^k$.

3) نطابق بين العزوم النظرية وعزوم العينة

$E(X) = \frac{1}{n}\sum x_i$ ، $E(X^2) = \frac{1}{n}\sum x_i^2$ ، $E(X^k) = \frac{1}{n}\sum x_i^k$

نحصل على k معادلة نتحلها فنحصل على الوسطاء التي هي مجاهيل ونعتبر الحل المشترك لها والتي هي عبارات

بدلالة العينة من الشكل $\hat{\alpha}_1 = g_1(x_1,\dots,x_n)$ ، ... ، $\hat{\alpha}_k = g_k(x_1,\dots,x_n)$
فكل عبارة هي إحصاءة ماذا بدلنا كل X_i بقيمته x_i نحصل
على التقديرات النقطية $\hat{\alpha}_1$ ، ... ، $\hat{\alpha}_n$ للوسطاء α_1 ، ... ، α_n
المجهولة .

والهدف أسلوب يدعى طريقة المعقولية العظمى للتقدير النقطي
وتتلخص بالخطوات التالية
(1) ايجاد توزيع العينة

$$L(x) = L(x_1,\dots,x_n) = f_x(x_1) \cdot f_x(x_2) \cdots f_x(x_n)$$

(2) البحث عن قيم الوسطاء $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ المتضمنة بشكل $f_x(x_i)$
التي تجعل $L(x)$ يأخذ أعظم قيمة له ودراسة بجعل المشتقات
الجزئية لـ $L(x)$ بالنسبة لكل من α_1 ، ... ، α_k مساوية للصفر

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0 \quad , \dots , \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_n} = 0$$

(3) فيكون الحل المشترك لهذه المعادلات كذلك احصاءات قيمها
هي القيم التقديرية للوسطاء

$$\hat{\alpha}_1 = h(x_1,\dots,x_n) , \dots , \hat{\alpha}_k = h_k(x_1,\dots,x_n)$$

مثال: يخضع X م.ع توزيع منتظم على المجال $(0 \quad \alpha)$ أوجد
بطريقة العزوم مقدر الوسيط α .

الحل: الكثافة الاحتمالية لـ X : $f_x(x) = \frac{1}{\alpha}$; $x \in (0 \quad \alpha)$
تتضمن وسيط واحد فيكفي حساب عزم واحد أي $m_1 = E(X)$
والذي يساوي : $E(X) = \frac{\alpha}{2}$

الآن نحسب العزم الأول للعينة من أجل العينة $X_1,\dots,X_n$
$M_1 = \frac{1}{n}\sum X_i$ ثم نساوي بينه $m_1 = M_1$
ونكتب

$$\frac{1}{n}\sum X_i = \frac{\hat{\alpha}}{2} \Rightarrow \hat{\alpha} = 2\bar{X}$$

لو اعتبرنا أن قيم العينة

$x_1 = 1.3,\ x_2 = 1.0,\ x_3 = 0.9,\ x_4 = 1.1,\ x_5 = 1.5,$
$x_6 = 1.0,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.3,\ x_9 = 1.1,\ x_{10} = 1.4$

فتكون قيمة المقدر $\hat{\alpha}$ هي تقدير لـ α

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{10} \sum x_i = 2.4$$

وبالتالي نعتبر

$f_x = \frac{1}{2.4}\ ;\ x \in (0\ \ 2.4)$ هو القانون الاحتمالي لـ X

مثال إذا كانت 0.9 و 0.8 و 1.1 و 1 و 0.3 و 0.7 و 0.3 : x_i قيم عينة حجمها $n = 8$ لتوزيع أسي وسيطه α مجهول

أوجد مقدر العزوم للوسيط α

الحل : الكثافة الاحتمالية لـ X $f_x(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x \in R^+$

والعزم الأول لـ X هو $m_1 = \mu_x = EX = \frac{1}{\alpha}$

نطابق بين m_1 والعزم الأول للعينة $\bar{X}$ $M_1 = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{X}$

نحصل على الإحصاء التالي

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{X}}$$

نحسب قيمة $\bar{X}$ $\bar{x} = \frac{1}{8} \sum x_i = 0.8$

إذاً نقدر α بالقيمة $\hat{\alpha} = \frac{10}{8} = 1.25$

تمرين . أوجد مقدر العزوم لـ λ وسيط متغير بواسوني بدلالة عينة $X_1, ..., X_n$ له .

مثال : نفرض X م . ع . ذو توزيع طبيعي وسيطاه $\alpha_1 = \mu,\ \alpha_2 = \sigma^2$

أوجد مقدري العزوم للوسيطين بدلالة عينة $X_1, ..., X_n$ لـ X

الحل :

نعلم بالنسبة للطبيعي أن

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

لكن $\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = EX^2 - (E(X))^2$

أي $EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$M_2 = EX^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2$ نضع $m_1 = M_1$ نجد

فوجدها كل الشرك وضع $m_2 = M_2$ نجد

أي $\hat{\mu} = \bar{x}$ و $\hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$

$\hat{\mu} = \bar{x}$ و $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\bar{x})^2$ وهو المطلوب

ملاحظة: يمكن التعبير عن σ^2 بدلالة S^2 (تباين العينة)

$$\hat{\sigma}^2 = M_2 - M_1^2 - - - = \frac{n-1}{n} S^2$$

ونستنتج من معرفتنا السابقة

$$S^2 = \frac{n}{n-1}(M_2 - M_1^2)$$

مثال: نفرض X م منتظم على المجال $(a \quad b)$

ونفرض عينة له $X_1, \dots, X_n$ أوجد مقدري العزوم للوسيطين a و b

الحل: نعلم أن $x \in (a \quad b)$; $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ و

$m_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}$, $m_2 - m_1^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

أي $m_1 = \frac{a+b}{2}$, $m_2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

نطابق عزوم المتغير مع عزوم العينة ونكتب

$$M_1 = m_1 \Rightarrow \bar{X} = \frac{a+b}{2} , M_2 = m_2 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

نعوض قيمة a من الأولى ونبدلها في الثانية $3M_2 = b^2 - 2M_1 b + 4M_1^2 - 3M_2$

نحلها نجد لـ b

$$b = \frac{1}{2}\left(2M_1 \mp \sqrt{4M_1^2 - 16M_1^2 + 12M_2}\right) = M_1 \mp \sqrt{(M_2 - M_1^2)\cdot 3}$$

وبالتالي

$$a = 2M_1 - b = M_1 - \sqrt{3(M_2 - M_1^2)} , b = M_1 + \sqrt{3(M_2 - M_1^2)}$$

حيث اخترنا القيم التي تحقق $b > a$ ورفضنا القيم التي تجعل $a > b$

مثال: لنفرض X برنولي وسيطه p و $x_1, \ldots, x_n$ عينة لـ X
أوجد مقدر المعقولية العظمى للوسيط $\alpha = p$.

الحل: نعلم أن $f_X(i) = p^i q^{1-i}$ ، $i = 0, 1$ ونكتب توزيع العينة

$$L(x_1, \ldots, x_n, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

هذه الدالة تحوي بالإضافة للمتحولات $x_1, \ldots, x_n$ تحوي الوسيط p وقيمة الوسيط التي تجعل هذه الدالة تأخذ أعظم قيمة لها من أجل أي $x_1, \ldots, x_n$ هي القيمة التي تعدم المشتقة الأولى بالنسبة لـ p ويبرهن أن هذه الدالة تبلغ قيمة عظمى عندما $K(p) = \log L(p)$ يبلغ قيمته العظمى أي نحل المعادلة

$$\frac{dk}{dp} = 0 \quad \text{بشرط:} \quad \frac{d^2k}{dp^2} < 0$$

$$(K(p))'_p = 0 \Rightarrow \left(\sum x_i \log(p) + (n - \sum x_i) \log(1-p)\right)'_p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \sum_{1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum x_i) = 0$$

$$\Rightarrow (1-p) \sum x_i - p(n - \sum x_i) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n} \sum x_i$$

نلاحظ أن $(k(p))''_p = \frac{-1}{p} \sum x_i - \frac{n - \sum x_i}{(1-p)^2} < 0$

فيكون مقدر المعقولية العظمى $\hat{p} = M_1 = \frac{1}{n} x_i$

مثال: اذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ عينة لمتغير X طبيعي وسيطاه μ و σ^2 مجهولين. أوجد مقدري المعقولية العظمى للوسيطين.

الحل: نكتب توزيع العينة والتي سنعتبرها دالة في μ و σ^2

$$L(\mu,\sigma^2,x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$K(\mu,\sigma^2)=\log L=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial\mu}=0\Rightarrow\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial K}{\partial\sigma^2}=0\Rightarrow-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2=0$$

بالحل :

$$\mu=\bar{x}\quad,\quad\sigma^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$$

أي مقدري المعقولية العظمى

$$\hat{\mu}=M_1=\frac{1}{n}\sum x_i\quad,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2=\frac{n-1}{n}S^2$$

تمرين : أوجد مقدري العزوم لـ n و p وسيطي متغير ثنائي بدلالة $X_1,\dots,X_n$ عينة ثنائي وسيطاه n و p

خصائص المقدرات

تعلمنا طريقتان لتقدير وسطاء توزيع وهناك طرق أخرى وليس بالضرورة أن تتطابق النتائج في الطرق المختلفة فقد نحصل على مقدرين مختلفين لوسيط الذي حتى نختار المقدر الأفضل يجب أن يكون هناك معايير لجودة الاختيار

تعريف المقدر المنصف (غير متحاز)

نقول عن الاحصاء $\hat{\gamma} = g(x_1, \ldots, x_n)$ انه مقدر للوسيط γ للكثافة $f_X(x, \gamma)$ اذا حقق الشرط التالي

$$E(\hat{\gamma}) = \gamma$$

مثال نفرض $x_1, \ldots, x_n$ عينة لمتغير X . نحن نعلم أن $\gamma = \mu_X$ في أي متغير X يحوي وسيط $E\bar{X} = E(X) = \mu_X$

فإن $\hat{\gamma} = \bar{X}$ هو مقدر غير متحاز لـ γ

مثل البرنولي الذي وسيطه $E(X) = p$

البواسوني الذي $E(X) = \lambda$ =

الطبيعي الذي يحوي الوسيط $\mu = E(X) = \mu$

ان هذه الصفة للمقدرات صفة مرغوب فيها لكنها ليست كافية فهناك عدة مقدرات لوسيط جميعها منصفة فأي نختار منها:

مثلاً لو كان $\hat{\gamma}_1$ ، $\hat{\gamma}_2$ مقدرين منصفين مختلفين لـ γ وكان $E(\hat{\gamma}_1) = E(\hat{\gamma}_2) = \gamma$

$$p(|\hat{\gamma}_2 - \gamma| \leq 1) = 0.5 \quad , \quad p(|\hat{\gamma}_1 - \gamma| \leq 1) = 0.9$$

أي أنه اذا كررنا التجربة عدة مرات 100 سنحصل على 100 قيمة لـ $\hat{\gamma}_1$ وكذلك 100 قيمة للاحصاء الثاني $\hat{\gamma}_2$ لكن نسبة قيم $\hat{\gamma}_1$ التي تقع في جوار لـ γ نصف قطره 1 90% ونسبة القيم لـ $\hat{\gamma}_2$ التي تقع في نفس الجوار لـ γ 50% لذلك نفضل $\hat{\gamma}_1$ على $\hat{\gamma}_2$ كمقدر للوسيط γ

تعريف المقدر الأكثر فعالية

نفرض $\hat{\gamma}_1$ و $\hat{\gamma}_2$ مقدرين منحازين لـ γ نقول أن $\hat{\gamma}_1$ فعال أكثر من $\hat{\gamma}_2$ اذا كان $Var(\hat{\gamma}_1) < Var(\hat{\gamma}_2)$

مثال اذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ عينة لمتغير طبيعي ذات الوسطين μ و σ^2 ولنفرض $\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{5}(X_1 + \cdots + X_5)$ و $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ فأي المقدرين تفضل

الحل واضح ان $E\hat{\gamma}_1 = E\hat{\gamma}_2 = EX = \mu$

$V(\hat{\gamma}_2) = \frac{10}{100}\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{10}$, $V(\hat{\gamma}_1) = \frac{5}{25}\sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{5}$

اذن $V(\hat{\gamma}_2) < V(\hat{\gamma}_1)$ وبالتالي $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ أفضل

تعريف أفضل مقدر خطي منحاز لـ γ.

نقول ان $\hat{\gamma} = g(X_1, \ldots, X_n)$: أفضل مقدر خطي منحاز للوسيط γ للتوزيع $f_x(x, \gamma)$ للمتغير X اذا حقق الشروط التالية

(١) $\hat{\gamma} = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta$ عبارة خطية في العينة

(٢) $E(\hat{\gamma}) = \gamma$ اي انه منحاز

(٣) $Var(\hat{\gamma}^*) \geq Var(\hat{\gamma})$ حيث $\hat{\gamma}^*$ اي مقدر آخر يحقق (١) و (٢)

مبرهنة بفرض X م.ع. ذات $E(X) = \mu_x$ و $Var(X) = \sigma_x^2$ وبفرض $X_1, \ldots, X_n$ عينة لـ X فان $\bar{X}$ هو أفضل مقدر خطي منحاز للوسيط μ .

الاثبات :

ان $E(\bar{X}) = \mu_x$ و $\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n$

اي $\bar{X}$ يحقق اول شرطين

الآن نفرض ان $M = \sum a_i X_i + b$ مقدر آخر لـ μ

يحقق اول شرطين اي

$EM = \mu$ اي $\sum a_i \mu_{x_i} + b = \mu$ او $\mu_x \sum a_i + b = \mu$

وبالتالي $b = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad ; \quad \sum a_i = 1$$

$$V(M) = \sum a_i^2 V(X_i) = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

فيكون $\bar{X}$ أفضل مقدر خطي غير متحيز لـ μ_x اذا كانت

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ تجعل تباين M أصغر ما يمكن

لنبرهن :

من العلاقة $\sum a_i = 1 \Leftarrow a_1 = 1 - \sum a_i$

ولنبحث عن قيم a_i التي تجعل $\sum a_i^2 = Q$ أصغر ما يمكن :

$$Q = a_1^2 + \sum_{2}^{n} a_i^2 = \left(1 - \sum_{2}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{2}^{n} a_i^2$$

نجعل $\frac{\partial Q}{\partial a_2} = 0 \; , \; \frac{\partial Q}{\partial a_3} = 0 \; , \dots , \; \frac{\partial Q}{\partial a_n} = 0$

ونوجد الحل المشترك . أي بفرض $j = 2, 3, \dots, n$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = -2\left(1 - \sum_{2}^{n} a_i\right) + 2a_j = 0 \Rightarrow a_j + \sum_{2}^{n} a_i - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a_j = 1 - \sum_{2}^{n} a_i = a_1 \qquad j = 2, 3, \dots, n$$

أي القيم المحققة هي المتساوية والتي مجموعها 1 أي

$j = 1, 2, \dots, n$ $\quad a_j = \frac{1}{n}$ وبالتالي مكون المقدر المطلوب هو $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

أي $\bar{X}$ هو أفضل مقدر خطي غير متحيز لـ μ

وهذا ينطبق على التوزيعات : البرنولي — البواسوني — الطبيعي

تعريف المقدر المتسق (المتلاحم)

نفرض $X_1, \dots, X_n$ عينة لمتغير كثافته $f_x(x, \theta)$

ويفرض Λ_n مقدر للوسيط θ . نقول أن Λ_n متناسق اذا تحققت الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|\Lambda_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

أي أن المتغير العشوائي (المحصاد) Λ_n تتكاثف قيمه وتتجمع بجوار الوسيط θ كلما زادت قيمة n

مبرهنة اذا كان $\lim_{n\to\infty} E(\Lambda_n) = \theta$ و $\lim_{n\to\infty} Var(\Lambda_n) = 0$

يكون Λ_n مقدر متناسق للوسيط θ .

مثال بفرض $X_1, \ldots, X_n$ عينة لمتغير X طبيعي توقعه μ وتباينه σ^2

ولنفرض $\bar{X}$ متوسط العينة والتي كما نعلم

$E(\bar{X}) = \mu$ و $Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ عندها

اذا نظرنا لـ $\bar{X}$ بانه مقدر للوسيط μ فإن $\bar{X}$ يحقق

شروط المبرهنة $E\bar{X} \to \mu$ و $V(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

اذاً $\bar{X}$ مقدر متسق لـ μ

تمرين : هل $\bar{X}$ مقدر متسق لوسيط متغير بواسون λ

تمرين : = $\bar{X}$ = لوسيط متغير اسي α

مثال بفرض $X_1, \ldots, X_n$ عينة طبيعية بوسيطيه μ و σ^2

هل $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$ مقدر متسق لـ σ^2

الحل نعلم أن $\dfrac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2$

متغير عشوائي يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية $n-1$ ونعلم كذلك

أن $V\left(\dfrac{n-1}{\sigma^2} S^2\right) = 2(n-1)$ $\quad E\left(\dfrac{n-1}{\sigma^2} S^2\right) = n-1$

أي $E(S^2)=\sigma^2$, $V(S^2)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

فشروط المبرهنة محققة والمقدر S^2 لـ σ^2 مقدر متساوق

تعريف الإحصاء الكافي

نقول عن إحصاء $Y=Y(X_1,\dots,X_n)$ (تابع في العينة) أنه إحصاء كافي للوسيط θ إذا كان يتضمن بيانات كافية عن الوسيط وبمعنى آخر لا يوجد أي إحصاء آخر يتضمن بيانات تزيد عن البيانات (المعلومات) التي يتضمنها Y.

مبرهنة بفرض $X_1,\dots,X_n$ عينة عشوائية لمتغير X كثافته $f(x,\theta)$ تحتوي وسيط θ. إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون الإحصاء $Y=Y(X_1,\dots,X_n)$ مقدراً كافياً لـ θ هو أن نستطيع كتابة كثافة العينة

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=g(Y(x_1,\dots,x_n))H(x_1,\dots,x_n)$$

حيث $g(y,\theta)$ كثافة الإحصاء Y و $H(x_1,\dots,x_n)$ صيغة لا تحوي الوسيط θ.

أي الكثافة المشتركة (كثافة العينة) هي جداء تابعين الأول كثافة المقدر والثاني يتعلق بالعينة ومستقل عن الوسيط θ

مثال بفرض $f(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$ كثافة برنولي X وسيطه θ هل $Y=X_1+\dots+X_n$ إحصاء كافي لـ θ من أجل العينة $X_1,X_2,\dots,X_n$ ؟

الحل: نعلم أن Y متغير ثنائي وسيطاه n , θ «لأنه مجموع عينة برنولية» وكثافته

$$g_Y=\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

$$L(x_1,\dots,x_n,\theta)=f(x_1,\theta)\,f_X(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

$$=\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\,\theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2}\cdots\theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = \binom{n}{\sum x_i}\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}\frac{1}{\binom{n}{\sum x_i}}$$

نلاحظ أن

$$Y(x_1,\dots,x_n) = x_1+x_2+\dots+x_n = \sum x_i$$

و

$$\binom{n}{\sum x_i}\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = g_Y(\sum x_i) = g_Y(y=\sum x_i)$$

وهو تابع عند صورة $y=\sum x_i$ وفق كثافة الإحصاء (المقدر) $Y = X_1+\dots+X_n$

و $\left(\binom{n}{\sum x_i}\right)^{-1}$ تابع لا يتضمن الوسيط θ وهو متعلق بالعينة $x_1,\dots,x_n$

أي أن $Y=\sum X_i$ إحصاء كافي لـ θ

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f(x,\theta) = e^{\theta - x} \quad ; \quad x>\theta$$

و $X_1,\dots,X_n$ عينة عشوائية لـ X و

$$Y = Y(X_1,\dots,X_n) = \min(X_1,\dots,X_n) = X_{(1)}$$

هل $Y=\min(X_1,\dots,X_n)=X_{(1)}$ احصاء كافي للوسيط θ

الحل:

نحسب التوزيع التجميعي لـ X:

$$F_X(x) = \int_\theta^x e^{\theta-u}\,du = 1-e^{\theta-x} \quad ; \quad x>\theta$$

ومما في علاقة سابقة

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\left(1-F_X(x)\right)^{n-1} f_X(x)$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = n e^{(n-1)(\theta-x)}\cdot e^{\theta-x} = n e^{n(\theta-x)} = n e^{n\theta} e^{-nx}$$

تابع كثافة العينة

$$L(x,\theta) = f_X(x_1,\theta)\cdots f_X(x_n,\theta) = e^{\theta-x_1}\cdot e^{\theta-x_2}\cdots e^{\theta-x_n}$$

$$= e^{n\theta-\sum x_i} = n e^{n\theta} e^{-n\min(x_1,\dots,x_n)}\cdot\frac{e^{-\sum x_i}}{n e^{-n\min(x_1,\dots,x_n)}}$$

$$\Rightarrow L(x,\theta) = f_{X_{(1)}}(\min(x_1,\dots,x_n))\cdot H(x_1,\dots,x_n)$$

إذن استطعنا كتابة كثافة العينة على شكل حاصل ضرب دالتين الأولى
صورة $y=\min(x_1,\dots,x_n)$ وهي كثافة المقدر $Y=X_{(1)}$
والثانية $H=\frac{e^{-\sum x_i}}{n\,e^{-n\min(x_1,\dots,x_n)}}$ مستقلة عن الوسيط θ.

تمرين (1): نفرض $\theta>0$ ، $x>0$ ، $f_X(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$
ونفرض $Y_1=X_1+X_2$ ، $Y_2=X_2$ إحصائيتين
من أجل العينة X_1,X_2 التي حجمها $n=2$.

(1) أكتب كثافة العينة (الكثافة المشتركة لـ Y_1, Y_2)
(2) اثبت أن Y_1 إحصاء كافي للوسيط λ
(3) عيّن $f_{Y_1|Y_2=y_2}$.

تمرين (2): نفرض $X_1,\dots,X_6$ عينة طبيعية لمتغير $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
نفرض
$$Y_1=\frac{1}{6}\left((X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2\right)$$
$$Y_2=\frac{1}{5}\left((X_1-\bar{X})^2+\dots+(X_6-\bar{X})^2\right)$$
اثبت أن Y_1 مقدر غير متحيز لـ σ^2 وأن Y_1 كذلك مقدر غير متحيز
ثم أيهما تفضل